



K

$\frac{m_a}{r}$

K**

E_o

$$K = \left[\frac{Q_0}{AL^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

Q_o

L**

$\frac{m_o}{W}$

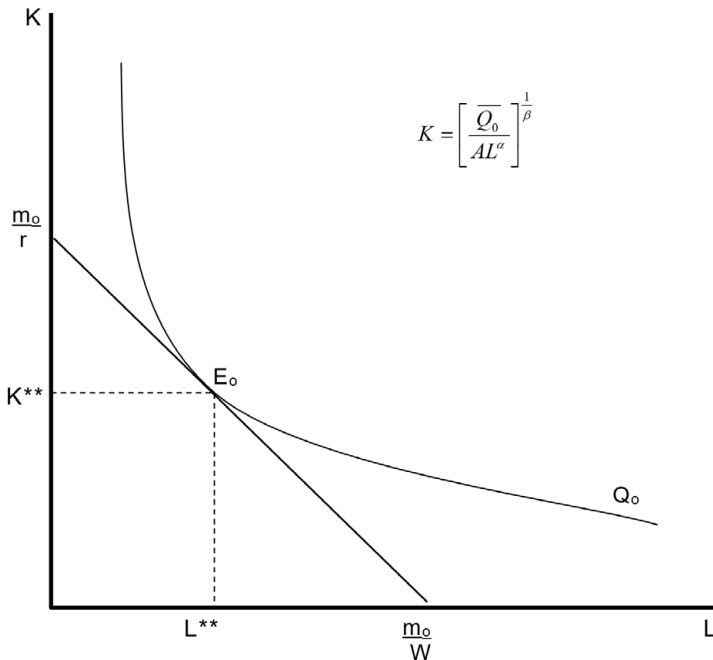
L

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS

Daniel Tabares Peralta

Facultad de Ciencias Contables
Económicas y Administrativas

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS



Daniel Tabares Peralta

Universidad de Manizales

Facultad de Ciencias Contables
Económicas y Administrativas

2026



UNIVERSIDAD DE
MANIZALES®

Duván Emilio Ramírez Ospina

Rector

Yamilhet Andrade Arango

Vicerrectora

Diego Hernández

Decano Facultad de Ciencias Contables
Económicas y Administrativas

Héctor Mauricio Serna Gómez

Director de Investigaciones y Posgrados
Editor Institucional

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS

© Daniel Tabares Peralta
Universidad de Manizales

ISBN: 978-958-5468-80-1

DOI: <https://doi.org/10.30554/978-958-5468-80-1>

Junio de 2026

Gestión Editorial - Diseño y diagramación

Gonzalo Gallego González

Fondo Editorial, Universidad de Manizales

Tabares Peralta, Daniel

La tecnología tipo COBB-DOUGLAS / Daniel Tabares Peralta. – Manizales: Fondo Editorial Universidad de Manizales, Facultad de Ciencias Contables, Económicas y Administrativas, 2026.

60 páginas.

ISBN: 978-958-5468-80-1

DOI: <https://doi.org/10.30554/978-958-5468-80-1>

1. Economía de la producción. 2. Tecnología de la producción. 3. Etapas de la producción. 4. Microeconomía. 5. Negocios – Oferta y Demanda. 6. Funciones de producción.
I. Título. II. Tabares Peralta, Daniel.

Dewey 338.5 cdd 22
Norma de descripción bibliográfica, RDA
Descriptores recuperados LEMB
Universidad de Manizales. Biblioteca

Contenido

Introducción	7
PRIMERA PARTE	9
1. La funcion de producción a corto plazo	9
1.1. Producto físico medio del trabajo ($PmeL$)	10
1.2. Producto físico marginal del trabajo ($PMaL$)	10
1.3. Los rendimientos marginales	10
1.4. Las etapas de la producción	11
1.5. La producción tipo COBB-DOUGLAS	12
1.5.1. Propiedades	13
1.5.2. El corto plazo	13
1.5.3. Producto físico medio del trabajo ($PmeL$)	13
1.5.4. Producto físico marginal del trabajo ($PMaL$)	14
1.5.5. La elasticidad con respecto al trabajo	14
1.5.6. Los rendimiento marginales	14
1.5.7. Relación entre los productos medio y marginal	14
2. El largo plazo	15
2.1. Propiedades de las isocuantas	16
2.2. Los rendimientos a escala	19

2.3. Los isocostos	20
2.3.1. Mapa de isocostos	22
SEGUNDA PARTE	23
3. La dualidad en el equilibrio del productor:	
maximización de la producción o minimización de los costos	23
3.1. Maximización de la producción	24
3.2. Minimización de los costos	29
TERCERA PARTE	33
4. Maximización del beneficio y demanda de factores	33
4.1. Demanda de factores y la función de oferta	39
4.2. Los factores específicos y la distribución de la renta	45
Bibliografía	58

Introducción

El productor enfrenta diversas restricciones dentro del proceso productivo, principalmente de orden económico por el lado de la oferta y de la demanda, y de disponibilidad de factores o recursos productivos, los cuales por naturaleza son escasos; estos factores como son la tierra, el capital, el trabajo, la iniciativa empresarial, los recursos energéticos, entre otros, presentan una disponibilidad poco relativa en las distintas sociedades llámense capitalistas, socialistas, desarrolladas o en vías de desarrollo; por esto las distintas sociedades tienen diferentes alternativas, viables, de combinar los recursos productivos para producir los bienes y servicios que necesitan para satisfacer sus necesidades. Estas maneras de combinar recursos se denominan tecnología, por lo que los planes de producción de las empresas deben ser factibles desde el punto de vista tecnológico. Estas combinaciones de factores relacionadas con los diferentes niveles de producción se describen fácilmente en lo que se denomina FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN, que se puede representar matemáticamente de diversas maneras, una de ellas se denomina "FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN TIPO COBB-DOUGLAS".

Con el presente libro pretendo demostrar algunos aspectos relevantes de la COBB-DOUGLAS. El trabajo se presenta en 3 capítulos, en el primero se presentan las propiedades de la función, las características del corto y largo plazo así como los isocostos; en el capítulo dos se trata el tema dual del equilibrio del productor a través de lo que es la maximización de la producción o la minimización de los costos; en el tercer capítulo se trata el

tema relacionado con la maximización del beneficio y la demanda de factores, obteniendo la función de oferta y desarrollando un caso específico de la demanda de factores para el caso de una de las teorías neoclásicas del comercio internacional. Los temas son abordados con la formalización matemática básica proporcionada por el cálculo diferencial y requerida según los casos presentados.

Este libro sirve como un apéndice matemático, para los cursos de microeconomía; y puede ser aprovechado por estudiantes y profesores que aborden el apasionado estudio de la microeconomía.

PRIMERA PARTE

1. La función de producción a corto plazo

El corto plazo está definido como el período de tiempo en el cual al menos uno de los factores productivos permanece fijo durante el proceso productivo. Aunque todos los insumos tienen la característica de ser variables a lo largo del tiempo, o de permanecer constantes en el corto plazo, el trabajo (L) es el insumo variable por excelencia, *ceteris paribus*.

Una función típica de producción a corto plazo toma la forma de una función cúbica, donde se observan las diversas propiedades que presentan las funciones de producción en la práctica (ver gráfico 1).

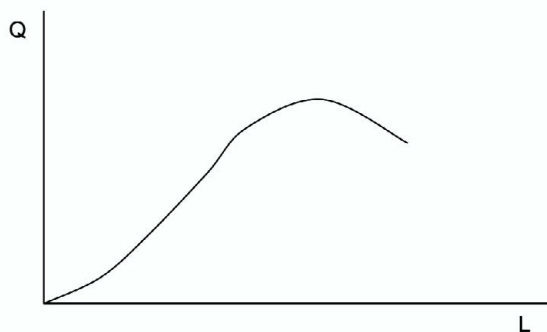


Gráfico 1

El comportamiento de la función muestra que ésta inicia desde el origen, lo que significa que si no se utiliza ningún insumo variable no se obtiene ningún nivel de producción. Inicialmente la adición de unidades adicionales del insumo variable hacen que la producción crezca cada vez mas, o sea una producción marginal creciente, posteriormente cuando la función llega y traspasa el punto de inflexión, la adición de unidades del insumo variable hace que la producción crezca cada vez menos, o sea una producción marginal decreciente; por último cuando la función alcanza su máximo, la adición de unidades del insumo hacen que la producción disminuya, o sea una

producción marginal negativa, el factor variable se torna improductivo ante las limitaciones por tener un factor fijo que en este caso se estaría utilizando plenamente.

1.1. Producto físico medio del trabajo (PM_eL)

Es la producción promedio por cada unidad de trabajo empleada durante un período dado, y está determinada por:

$$PM_eL = \frac{Q(L)}{L}$$

1.2. Producto físico marginal del trabajo ($PMaL$)

Es la relación que existe entre la variación de las cantidades producidas debido a la variación en una unidad del factor trabajo, y está determinada por la primera derivada de la función de producción para un nivel de insumo variable dado.

$$PMaL = \frac{dQ(L)}{dL}$$

El $PMaL$ es la pendiente de la función de producción en un punto determinado.

1.3. Los rendimientos marginales

En la medida que se agreguen unidades adicionales del insumo variable, permaneciendo los demás factores constantes, la producción puede crecer a ritmo:

- a. Creciente, donde la $PMaL$ es positiva creciendo cada vez mas, los recursos productivos están siendo subutilizados.
- b. Decreciente, donde la $PMaL$ es positiva creciendo cada vez menos, los recursos están siendo utilizados óptimamente (ley de los rendimientos marginales decrecientes)¹.

¹ La ley de los rendimientos marginales decrecientes sostiene que al agregar unidades adicionales de un factor variable, manteniéndose constante los demás factores, la producción total crece cada vez menos.

1.4. Las etapas de la producción

1.4.1. ETAPA I, cuando el $PMeL$ es creciente, el $PMaL$ es mayor que el $PMeL$. El $PMaL$ alcanza su máximo (que corresponde al punto de inflexión de la función de producción) y a partir de este punto comienza a operar la ley de los rendimientos marginales decrecientes, esta es una etapa ineficiente, donde los recursos son explotados inadecuadamente (ver gráfico 2).

En esta etapa se utilizó una cantidad pequeña de trabajo por lo cual su producción promedio ($PMeL$) es baja, pero en la medida que utilice unidades adicionales de trabajo se incrementa la productividad promedio de todas las unidades de trabajo, es decir, si la empresa no contrata unidades adicionales de trabajo, estaría desaprovechando esas ventajas, por lo cual sería ineficiente.

1.4.2. ETAPA II, comienza donde el $PMeL$ es igual al $PMaL$ y en ese punto el $PMeL$ alcanza su máximo (para un nivel de trabajo L_1), cuando el $PMeL$ es decreciente, el $PMaL$ es decreciente y menor que el $PMeL$; esta etapa que termina cuando el $PMaL$ es cero (que corresponde al nivel de máxima producción total), es eficiente en el sentido que todos los recursos son explotados adecuadamente (ver gráfico 2).

En esta etapa es posible la maximización de los beneficios, se han contratado las unidades necesarias de trabajo para salir de la etapa I, con la característica que la productividad de cada unidad de trabajo adicional ($PMaL$) incrementa la productividad promedio de todas las unidades, sin que dicha productividad, sea menor que la producción de la última unidad de trabajo contratada. En este sentido el productor estaría utilizando eficientemente las unidades de trabajo contratadas.

1.4.3. ETAPA III, comienza cuando el $PMaL$ es cero, que corresponde al punto donde la función de producción alcanza su máximo (para un nivel de trabajo L_2); a partir de este punto la $PMaL$ es negativa, por lo que es una etapa ineficiente (ver gráfico 2).

En esta etapa se han contratado unidades de trabajo que exceden o sobrepasan la capacidad productiva del insumo fijo, lo que quiere decir que al utilizar unidades adicionales de trabajo no es posible incrementar la producción, por el contrario, la producción total disminuirá, lo que significa que la producción adicional por unidad de trabajo ($PMaL$) se torna negativa; lógicamente ésta es una etapa ineficiente.

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN DE CORTO PLAZO

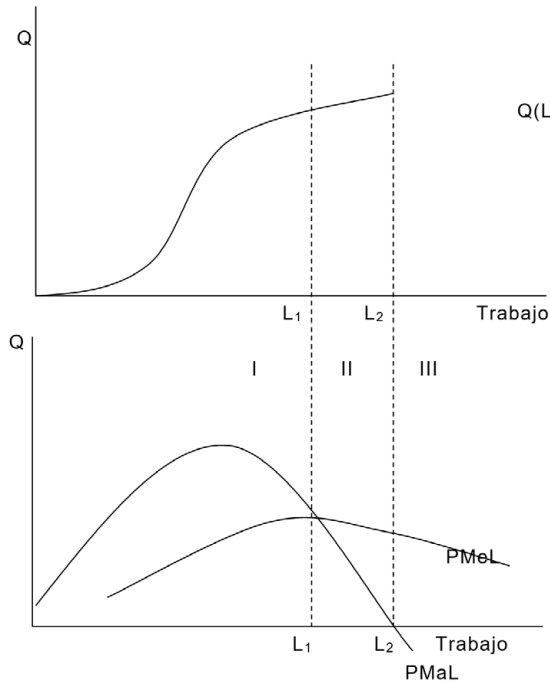


Gráfico 2.

1.5. La producción tipo COBB-DOUGLAS²

La función de producción COBB-DOUGLAS, tiene la siguiente forma funcional:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Donde:

Q , representa las cantidades producidas como una función de los factores L y K .

L y K , representan los factores trabajo y capital respectivamente.

A , es un coeficiente tecnológico, que mide la eficiencia en conjunto de los factores, a mayor A , más eficiencia tecnológica.

² La función de producción COBB-DOUGLAS, fue presentado por C.W. COBB y P.H. DOUGLAS en The American Economic Review, suplemento de 1928, pp. 139-165.

α y β , son parámetros que miden la respuesta de las cantidades producidas ante una vibración en los insumos trabajo y capital respectivamente; α mide la variación porcentual de la producción como resultado de una variación del 1% en el factor trabajo (L), manteniéndose constante el factor capital (K); de igual forma, β mide la variación porcentual de la producción como resultado de una variación del 1% en el factor capital (K), manteniéndose constante el factor trabajo (L), lo anterior define a α y β , como la elasticidad de la producción del trabajo y del capital respectivamente.

1.5.1. Propiedades

1. Función homogénea de grado³ $(\alpha + \beta)$.
2. En el caso especial de $(\alpha + \beta) = 1$, es linealmente homogénea.
3. Las relaciones entre el trabajo y el capital para un determinado nivel de producción son inversas, es decir las isocuantas (definidas más adelante), tienen pendiente negativa y son estrictamente convexas para valores positivos de L y K .
4. Es estrictamente caucicóncava para L y K positivos.
5. Una propiedad importante de esta tecnología es que es una FUNCIÓN MONÓTONA, lo que quiere decir que con una cantidad igual o mayor de ambos factores (L y K), debe ser posible obtener al menos el mismo nivel de producción.

1.5.2. El corto plazo

La función de producción total de corto plazo está expresada como:

$$Q = AL^\alpha \bar{K}^\beta \rightarrow Q = AL^\alpha$$

Donde el coeficiente tecnológico A está dado y el capital K permanece constante.

1.5.3. Producto físico medio del trabajo (PmeL)

$$PMeL = \frac{Q(L)}{L} = \frac{AL^\alpha}{L} = AL^{\alpha-1}$$

³ Una función es homogénea de grado $a+b$, si al multiplicar tanto L y K por una constante λ , el valor de la función de producción se altera en la proporción λ elevado a la $a+b$.

1.5.4. Producto físico marginal del trabajo ($PMaL$)

$$PMaL = \frac{dQ(L)}{dL} = \alpha AL^{\alpha-1}$$

El $PMaL$ es la pendiente de la función de producción en un punto determinado.

1.5.5. La elasticidad con respecto al trabajo

En éste el parámetro α está definido como la elasticidad de la producción con respecto al trabajo; si tenemos en cuenta que la elasticidad mide la sensibilidad de las variaciones porcentuales en las cantidades ante las variaciones porcentuales en los precios, quedaría:

$$e_{Q,L} = \left(\frac{\alpha AL^{\alpha-1}}{AL^{\alpha}} \right) L = \alpha$$

1.5.6. Los rendimientos marginales

1.5.6.1. Crecientes, donde $\alpha > 1$, la $PMaL$ es positiva y los recursos productivos están siendo subutilizados (rendimientos marginales crecientes).

1.5.6.2. Decrecientes, donde $\alpha < 1$, la $PMaL$ es positiva y los recursos están siendo utilizados óptimamente (ley de los rendimientos marginales decrecientes)⁴.

1.5.7. Relación entre los productos medio y marginal

El $PMaL$ es una fracción α del $PMeL$.

$$PMaL = \alpha PMeL = \alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta}$$

⁴ La ley de los rendimientos marginales decrecientes sostiene que al agregar unidades adicionales de un factor variable, manteniéndose constante los demás factores, la producción total crece cada vez menos.

2. El largo plazo

El largo plazo está definido como el período de tiempo en el cual no existen insumos fijos, todos son variables. La representación gráfica de la función de producción de largo plazo se conoce como las ISOCUANTAS (igual cuantía), donde los insumos trabajo (L) y capital (K) se combinan de diferentes maneras (tecnología) para permitir el mismo nivel de producción.

La representación funcional de una isocuanta con base en la tecnología COBB-DOUGLAS para un nivel de producción determinado es de la siguiente manera:

$$\bar{Q}_0 = AL^\alpha K^\beta$$

Donde:

$$K = \left(\frac{\bar{Q}_0}{AL^\alpha} \right)^{1/\beta}$$

En este caso para obtener el nivel de producción (Q_0), se requieren diferentes combinaciones de trabajo y capital (los dos insumos se tornan variables), existiendo una relación inversa entre los dos factores.

Gráficamente los valores del capital van en el eje de las ordenadas y los del trabajo en el eje de las abscisas, Q_0 , representa la isocuanta para un determinado nivel de producción.

FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN A LARGO PLAZO

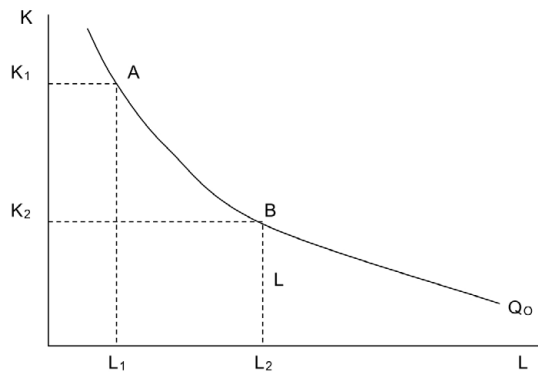


Gráfico 3

2.1. Propiedades de las isocuantas

1. Las isocuantas tipo COBB-DOUGLAS, tienen pendiente negativa, lo que quiere decir que para mantener el mismo nivel de producción (desplazamiento sobre una isocuanta), se pueden sustituir unidades de capital por unidades de trabajo o viceversa, en el gráfico 3 para pasar del punto A al punto B, se deben de sustituir $(K_1 - K_2)$ unidades de capital por $(L_1 - L_2)$ unidades de trabajo, manteniendo constante la producción en el nivel Q_0 . Esta sustitución de factores que se define a través de la pendiente de la isocuanta, se denomina TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN TÉCNICA (TMST).
2. LA TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN TÉCNICA, de trabajo por capital, es el valor absoluto de la tasa a la cual el capital puede ser sustituido por el trabajo, sin que se altere la producción, según la gráfica 2, la TMST entre el punto A y el punto B, sería:

$$TMST_{LK} = \left| \frac{\Delta K}{\Delta L} \right|$$

Ahora, como la producción no sufre alteración ante la variación de los factores, al pasar del punto A al punto B (gráfica 3), si se sustituyen ΔK ($K_1 - K_2$) unidades de K por ΔL unidades de L ($L_2 - L_1$), la disminución en la producción debido a la disminución de ΔK unidades (es decir $\Delta K \times PMaK$) debe corresponder exactamente al aumento en la producción debido al aumento de ΔL unidades (es decir $\Delta L \times PMaL$), o sea que a lo largo de la isocuanta:

$$\Delta K \times PMaK = \Delta L \times PMaL \text{ lo que equivale a } \left| \frac{\Delta K}{\Delta L} \right| = \frac{PMaL}{PMaK} = TMST_{LK}$$

La TMST en términos del cálculo diferencial sería: Como la producción no sufre variación al sustituirse un factor por otro el diferencial de Q es igual a cero, $dQ = 0$, por tanto:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial L} dL + \frac{\partial Q}{\partial K} dK = 0$$

$$\text{donde: } -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K} = \frac{PMaL}{PMaK} = TMST_{LK} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

Lo anterior nos indica que la TMST entre los factores, es igual a la pendiente de la isocuanta, que está dada por la derivada de la función de producción COBB-DOUGLAS, en un determinado punto.

3. Diferentes niveles de producción significan diferentes niveles de isocuantas, lo que da origen al mapa de isocuantas, el cual es denso, debido a que cada punto en el plano trabajo-capital es cortado por una sola isocuanta, lo que da lugar a infinitas isocuantas. Isocuantas más a la derecha significan niveles de producción más altos ya que se requieren mayores combinaciones de trabajo y capital, análogamente isocuantas más a la izquierda significan niveles de producción menores, o sea menores combinaciones de trabajo y capital (gráfico 4).

MAPA DE ISOCUANTAS

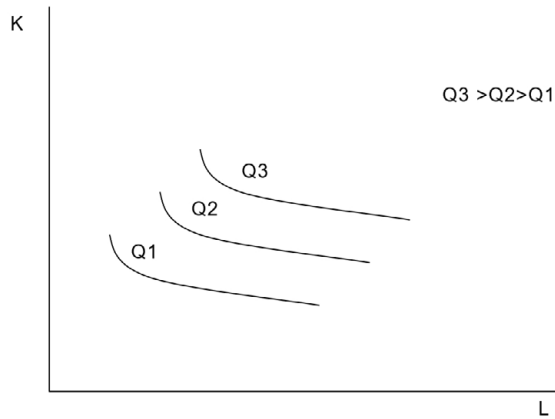


Gráfico 4

4. Las isocuantas no se cortan, ello significa una contradicción de la lógica, si observamos el gráfico 5, las combinaciones de insumos A y C están sobre la isocuanta Q_2 , mientras que las combinaciones A y B están sobre la isocuanta Q_1 , por lo cual B y C serían equivalentes a A y deberían estar sobre la misma isocuanta, pero no lo están; la combinación B produce más que la C por estar en una isocuanta más alta: por lo tanto la intersección de isocuantas no es posible.

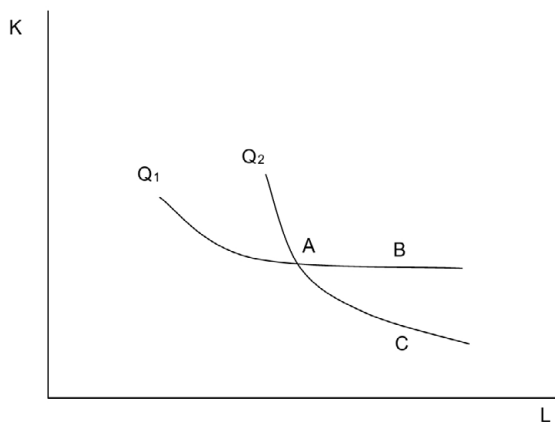


Gráfico 5

5. Las isocuantas son convexas respecto al origen, en la medida que se sustituyen unidades de capital por trabajo, de izquierda a derecha sobre una isocuanta, la TMST se hace cada vez menor, lo que quiere decir que la empresa al utilizar unidades adicionales de trabajo, estará dispuesta a utilizar proporcionalmente menos unidades de capital, o sea que al ser relativamente menores las unidades de capital sustituido por las unidades de trabajo, la $PMaK$ será mayor y la $PMaL$ será menor (por la ley de los rendimientos marginales decrecientes).

La convexidad implica que el valor absoluto de TMST disminuye a medida que se sustituyen unidades de capital por más unidades de trabajo a lo largo de la isocuanta, es decir el trabajo se combina con menos unidades de capital, lo que significa que al disminuir las unidades de capital, aumenta la producción marginal del capital ($PMaK$), y al aumentar las unidades de trabajo, disminuye la producción marginal del trabajo ($PMaL$), y como lo la pendiente de la isocuanta, en términos absolutos, es $PMaL/PMaK$, quiere decir que la isocuanta está declinando y es convexa al origen.

2.2. Los rendimientos a escala

La función de producción de largo plazo produce rendimientos a escala, en la medida que los factores productivos varíen proporcionalmente, las cantidades producidas variarán también, pero en menor, igual o mayor proporción, por lo cual se dice que la función tiene rendimientos decrecientes, constantes o crecientes a escala respectivamente. En este caso tenemos que al multiplicar cada uno de los factores capital y trabajo por una constante c , la producción quedará multiplicada por un valor inferior (si $(\alpha+\beta)<1$), igual (si $(\alpha+\beta)=1$) o superior (si $(\alpha+\beta)>1$), a dicha constante:

$$Q(cK, cL) = A(cL)^\alpha (cK)^\beta = c^{a+b} AL^\alpha K^\beta$$

Ejemplos:

$$1) Q = K^{0.3} L^{0.6}$$

Si, $c = 2$

$$Q = (2K)^{0.3} (2L)^{0.6} = 2^{0.3+0.6} K^{0.3} L^{0.6} = 1.86606(K^{0.3} L^{0.6})$$

En este caso la función presenta rendimientos decrecientes a escala, donde $(\alpha+\beta)<1$.

$$2) Q = 4K^{0.5} L^{0.5}$$

Si, $c = 2$

$$Q = 4(2K)^{0.5} (2L)^{0.5} = 2^{0.5+0.5} 4K^{0.5} L^{0.5}$$

En este caso la función presenta rendimientos constantes a escala, donde $(\alpha+\beta)=1$.

$$3) Q = 3K^{0.5} L^{0.7}$$

Si, $c=2$

$$Q = 3(2K)^{0.5} (2L)^{0.7} = 2^{0.5+0.7} 3(K^{0.5} L^{0.7}) = 2.2974(3K^{0.5} L^{0.7})$$

En este caso la función presenta rendimientos crecientes a escala, donde $(\alpha+\beta)>1$.

2.3. Los isocostos

El productor dentro de su actividad se enfrenta a una serie de restricciones de tipo financiero, donde tiene que decir cómo distribuye su limitado presupuesto para adquirir los factores productivos que le permitan obtener una producción máxima posible. Si hablamos de factores variables en el largo plazo, la restricción presupuestaria del productor está dada por la siguiente ecuación rectilínea:

$$m = rK + wL$$

La anterior se conoce como la ecuación de isocostos, donde:

La m , representa los recursos financieros de los que dispone el productor (presupuesto).

La r , representa la renta o precio por unidad de capital que debe pagar el productor en un período de tiempo determinado, generalmente se obtiene mediante la tasa de interés del mercado que tiene que pagar la empresa por tomar prestado un capital para fines de inversión.

La K , representa las unidades del factor capital.

La w , representa los salarios o el precio por unidad de trabajo empleada por el productor en un período de tiempo determinado, se puede expresar en pesos por hora de trabajo, pesos por trabajador-mes, etc.

La L , representa las unidades del factor trabajo.

Si el productor dispone de un presupuesto dado (m_0), la ecuación quedaría:

$$K = \frac{m_0}{r} - \frac{w}{r}L$$

La anterior ecuación corresponde a la ecuación de isocosto rectilíneo, donde la pendiente está dada por el coeficiente del factor trabajo $-(w/r)$, que representa la tasa a la cual pueden ser cambiados los factores sin necesidad de cambiar el presupuesto. Su representación gráfica es:

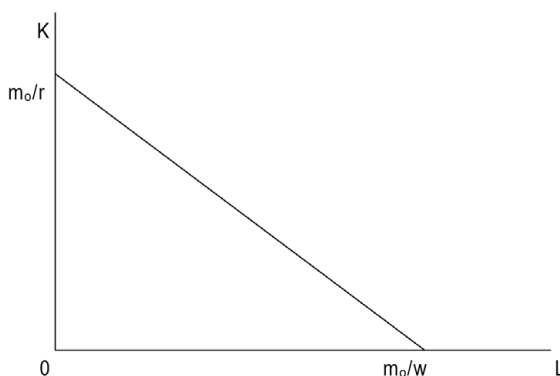


Gráfico 6

La recta de isocosto representa las distintas combinaciones de factores en las cuales el productor dispone la totalidad de su presupuesto, si desea obtener unidades adicionales de un factor debe renunciar a unidades del otro factor, esta tasa de sacrificio está determinada por la pendiente y específicamente por su valor absoluto, w/r , conocida también como LA RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN EN EL MERCADO (RSM), llevado en términos del cálculo diferencial, esta sustitución de un factor por otro, está determinada por la derivada de la función de isocosto:

$$RSM = \frac{dK}{dL} = -\frac{w}{r}$$

Ejemplo: Dado que $w = -2/l = -2$ lo que quiere decir que dado el presupuesto de \$16 y sin que varíen los precios del capital y el trabajo si la em-

presa desea utilizar una unidad adicional de trabajo tiene que renunciar a 2 unidades de capital (al pasar de A a B, gráfico 7).

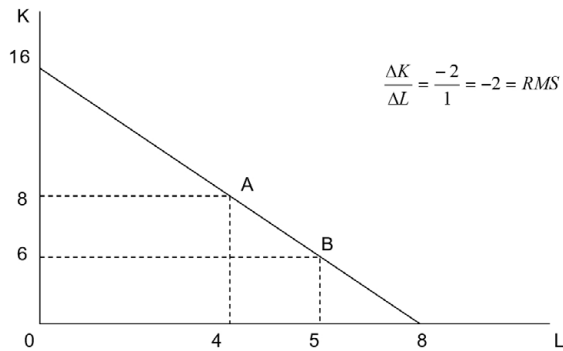


Gráfico 7

2.3.1. Mapa de isocostos

Si los precios de los factores permanecen constantes, pero existen variaciones en el presupuesto del producto (m_0), la recta de isocosto se desplazará paralelamente hacia la derecha si el presupuesto aumenta (m_1) o hacia la izquierda si el presupuesto disminuye (m_2). Lo que quiere decir que un productor puede obtener diferentes rectas de isocostos, dependiendo de las disponibilidades presupuestales (gráfico 8).

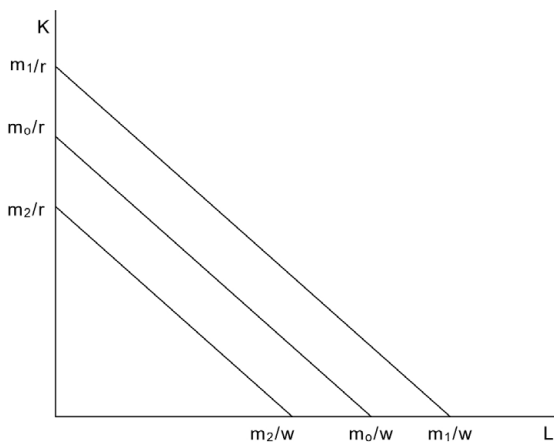


Gráfico 8

SEGUNDA PARTE

3. La dualidad en el equilibrio del productor: maximización de la producción o minimización de los costos

El productor se enfrenta a diferentes alternativas productivas según su mapa de isocuantas, tales posibilidades están sujetas a la disponibilidad presupuestal que le permitan al productor adquirir las unidades necesarias de los factores trabajo y capital para obtener un máximo de producción agotando su presupuesto; es decir donde alcance una isocuanta (Q_1) tangente a la recta de isocosto (punto A, en el grafico 9).

Alcanzar la isocuanta Q_2 representa una mejor opción, pero en este caso el presupuesto es insuficiente, distinto si produce el nivel representado en la isocuanta Q_3 , donde puede agotar todo su presupuesto, puntos B ó C, pero estaría produciendo menos (Q_3 es menor que Q_1), lo que no resultaría racional. Ahora si utiliza una combinación de factores que se ubique en un punto sobre la isocuanta Q_3 , no estaría agotando todo su presupuesto y seguiría produciendo una cantidad que no le permitiría maximizar sus beneficios, lo que también rompería con el principio de la racionalidad del productor.

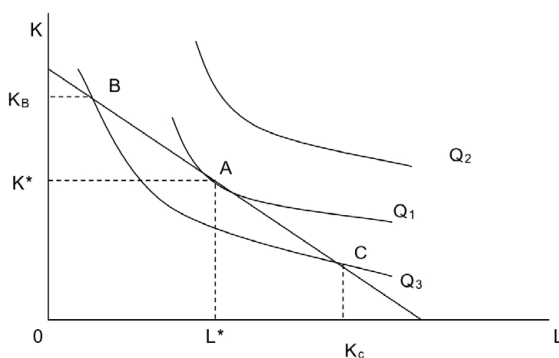


Gráfico 9

Para encontrar las unidades de trabajo (L^*) y capital (K^*) que permitan maximizar la producción sujeta a una restricción presupuestaria, se hace uso del cálculo a través de los multiplicadores de Lagrange: 2 MÉTODOS (maximización de la producción y de minimización de costos).

3.1. Maximización de la producción

Sea:

$Q = AL^{a+b}$ la función objetivo a maximizar

Sujeta a:

$m = rK + wL$ la restricción del isocosto

De donde la función lagrangiana es:

$$Q^* = AL^a K^b + l (m - rK - wL)$$

Diferenciando con respecto a L , K e igualando las derivadas a cero, tenemos que:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta - \lambda w = 0$$

De donde:

$$\lambda_L = \frac{\alpha AL^{\alpha-1} K^\beta}{w} = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{PMaL}{w} \quad (1)$$

En este caso λ_L se conoce como el PRECIO SOMBRA DEL TRABAJO y mide en términos de unidades físicas de producto, cual es el rendimiento de la última unidad monetaria invertida en unidades de trabajo.

$$\frac{\lambda Q^*}{\lambda K} = \beta AL^\alpha K^{\beta-1} - \lambda r = 0$$

De donde:

$$\lambda_K = \frac{\beta AL^\alpha K^{\beta-1}}{r} = \frac{PMaK}{r} \quad (2)$$

En este caso λ_K se conoce como el PRECIO SOMBRA DEL CAPITAL, y mide en términos de unidades físicas de producto, cuál es el rendimiento de la última unidad monetaria invertida en unidades de capital.

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \lambda} = m - rK - wL = 0$$

De donde:

$$m = rK + wL \text{ (es la restricción) (3)}$$

El equilibrio en la inversión se logrará si la última unidad monetaria invertida en capital, rinde lo mismo que la última unidad monetaria invertida en trabajo⁵, es decir si:

$\lambda_K = \lambda_L$ o sea que $(\lambda_K / \lambda_L) = 1$ lo que quiere decir que si dividimos (2) entre (1), quedaría: $\frac{\frac{PMaK}{r}}{\frac{PMaL}{w}} = 1$ de donde $\frac{PMaL}{PMaK} = \frac{w}{r}$ lo cual significa que:

$$TMST = RMS.$$

Donde la $TMST = RMS$, es el punto de equilibrio, en el cual el productor alcanza su máximo nivel de producción, teniendo en cuenta su presupuesto. Gráficamente este punto representa la tangencia entre la curva de isocuanta más alta y la de isocosto, o sea donde sus pendientes son iguales.

Si a largo plazo, el productor se enfrenta a distintos puntos de equilibrio, debido a variaciones en el presupuesto, manteniéndose constante la relación entre los precios de los factores K y L , la curva de isocostos se desplaza paralelamente a la derecha si su presupuesto aumenta, o a la izquierda si el presupuesto disminuye; estas rectas de isocostos serán tangentes a diferentes isocuantas, definiendo así distintos puntos de equilibrio que al unirlos se obtiene la denominada SENDA DE EXPANSIÓN (gráfico 10).

5 En este caso se cumple el principio de la equimarginalidad o la segunda ley de Gossen, que describe la condición para maximizar la utilidad, en este caso la producción, donde para un presupuesto dado, debe distribuirse entre los diferentes factores de tal manera que sus utilidades marginales ponderadas por el precio del factor, sean iguales en dichos factores.

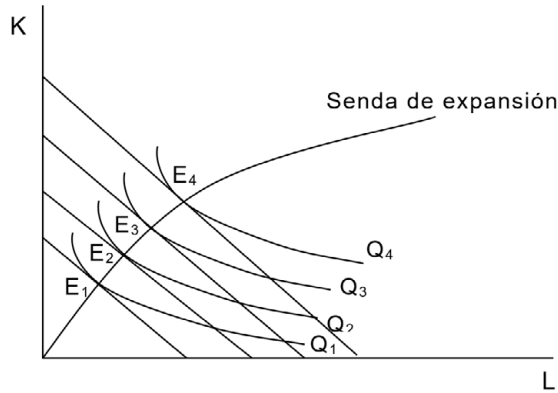


Gráfico 10

La ecuación por la senda de expansión se obtiene a partir de la condición de equilibrio del productor.

$$\frac{PMaL}{PMaK} = \frac{w}{r}, \text{ donde } \frac{PMaL}{w} = \frac{PMaK}{r}, \text{ o sea } \lambda_K = \lambda_L, \quad \text{si } \lambda_K / \lambda_L = 1$$

$$\text{Entonces } \left(\frac{PMaL}{w} \right) \Bigg/ \left(\frac{PMaK}{r} \right) = 1. \text{ por lo tanto } \frac{\frac{\alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta}}{w}}{\frac{\beta AL^{\alpha} K^{\beta-1}}{r}} = 1$$

Donde: $\frac{\alpha K r}{\beta L w} = 1$, al despejar K , la ecuación de la senda quedaría

$$K = \frac{w}{r} \frac{\beta}{\alpha} L \quad (4)$$

La senda de expansión muestra el costo total a largo plazo mínimo de producir cada nivel de producción.

Reemplazando 4 en 3:

$$m = r \left(\frac{w}{r} \frac{\beta}{\alpha} L \right) + wL \Rightarrow m = wL \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \Rightarrow m = wL \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)$$

$$\text{Donde } L^* = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \frac{m}{w} \quad (5)$$

Donde $\alpha/(\alpha+\beta)$ es la proporción del presupuesto m , que se invierte al contratar unidades de trabajo. Dado el presupuesto, si aumenta el salario (w), disminuyen las cantidades demandadas de trabajo (L) (gráfico 11).

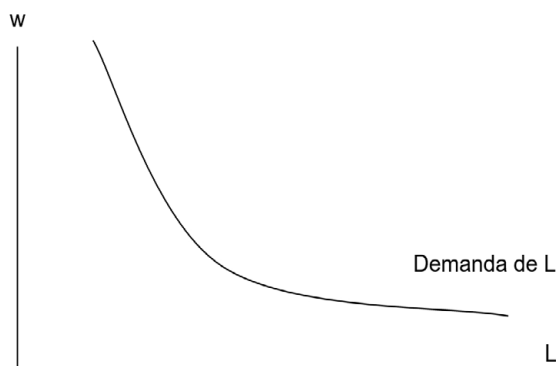


Gráfico 11

Ahora si reemplazamos 5 en 4, tenemos que:

$$K = \frac{w}{r} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \frac{m}{w} \Rightarrow K^* = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \frac{m}{r}$$

Donde $\beta/(\alpha+\beta)$, es la proporción del presupuesto, m , que se invierte al utilizar unidades de capital. Dado el presupuesto, si aumenta el costo del capital (r), disminuyen las cantidades demandadas de capital (K) (gráfico 12).

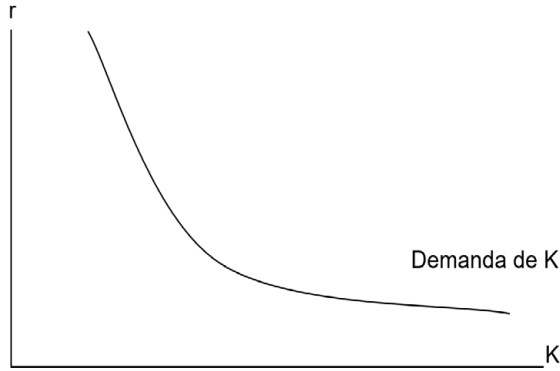


Gráfico 12

L^* y K^* representan las demandas marshallianas⁶ del trabajo y del capital, respectivamente. Estos factores representan las cantidades óptimas que permiten maximizar la producción dado un presupuesto. Ahora, si estas demandas se reemplazan en la función objetivo, se obtiene la “FUNCIÓN INDIRECTA DE PRODUCCIÓN”:

$$Q^* = A \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{M}{w} \right]^\alpha \left[\frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{M}{r} \right]^\beta$$

$$Q^* = A \left(\frac{\alpha}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{r} \right)^\beta \frac{M^{\alpha + \beta}}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}$$

La función objetivo describe en forma general la relación entre los niveles de producción y la utilización de factores, mientras que la función indirecta de producción incorpora el comportamiento optimizador (máximo nivel de producción con mínimos costos) entre un nivel de producción y el presupuesto utilizado en cada uno de los factores trabajo y capital.

6 La denominada demanda Marshalliana de factores, o demanda ordinaria, establece una relación fundamental entre las cantidades de L y K demandadas y el presupuesto. A diferencia de la demanda Hicksiana o compensada donde la relación se da entre las cantidades de factores demandados y un nivel de producción deseado.

3.2. Minimización de los costos

Si aplicamos el proceso anterior tomando como función objetivo la ecuación de costos, y la función de producción como la restricción, tenemos que:

$$CT^* = wL + rK \quad \text{Función objetivo a minimizar}$$

Sujeta a:

$$\bar{Q} = AL^\alpha K^\beta$$

De donde la función lagrangiana es:

$$CT^* = wL + rK + \lambda(\bar{Q} - AL^\alpha K^\beta)$$

Diferenciando con respecto a L , K y λ , e igualando las derivadas a cero (condiciones de primer orden para que la función esté en un mínimo), tenemos que:

$$\frac{\partial CT^*}{\partial L} = w - \lambda \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta = 0$$

$$\text{Donde: } \lambda_L = \frac{w}{\alpha AL^{\alpha-1} K^\beta} = \frac{w}{PMaL} \quad (1)$$

$$\frac{\partial CT^*}{\partial K} = r - \lambda \beta AL^\alpha K^{\beta-1} = 0$$

$$\text{Donde: } \lambda_K = \frac{r}{\beta AL^\alpha K^{\beta-1}} = \frac{r}{PMaK} \quad (2)$$

Tanto λ_L como λ_K se conoce como los precios sombra del trabajo y capital respectivamente, y miden en términos de unidades monetarias, cual es el costo de la última unidad utilizada de trabajo y capital.

$$\frac{\partial CT^*}{\partial \lambda} = Q - AL^\alpha K^\beta = 0 \quad (\text{es la restricción}) \quad (3)$$

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

El equilibrio se logrará cuando el costo de la última unidad utilizada de trabajo sea igual al de la última unidad utilizada en capital, es decir, $\lambda_k = \lambda_l$ o sea, $\lambda_k/\lambda_l = 1$, lo que quiere decir que si dividimos (1) entre (2) quedaría:

$$\frac{\frac{w}{PMaL}}{\frac{r}{PMaK}} = 1, \text{ de donde: } PMaL/PMaK = w/r$$

Lo cual significa que $TMST = w/r$

Lo anterior significa que donde $TMST = w/r$, es el punto de equilibrio en el cual el productor minimiza los costos de producción teniendo en cuenta un determinado nivel de producción, gráficamente este punto representa la tangencia entre la curva de isocuanta y la de isocosto, o sea donde sus pendientes son iguales (gráfico 13).

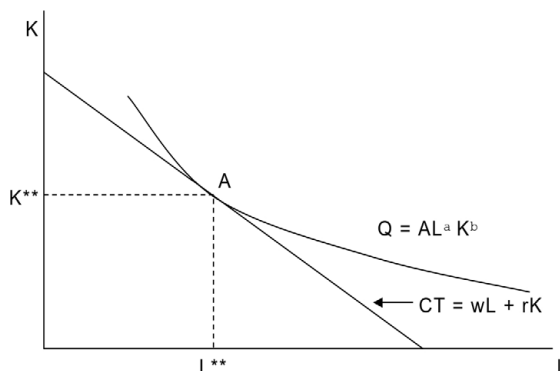


Gráfico 13

Ahora, del equilibrio $PMaL/PMaK = w/r$, se obtiene la ecuación para la SENDA DE EXPANSIÓN:

Como $PMaL = aAL^{a-1}K^b$ y $PMaK = bAL^aK^{b-1}$, se tiene:

$\frac{\alpha AL^{a-1}K^b}{\beta AL^aK^{b-1}} = \frac{w}{r}$, o sea $w/r = aK/bL$, al despejar K , se obtiene la respectiva ecuación:

$$K = w\beta L / r\alpha \quad (4) \text{ (para la senda de expansión)}$$

Se reemplaza (4) en la restricción $\bar{Q} = AL^\alpha K^\beta$, se obtiene

$$\bar{Q} = AL^\alpha \left(\frac{w\beta L}{r\alpha} \right)^\beta$$

Al despejar L :

$$L^{\alpha+\beta} = \frac{\bar{Q} r^\beta \alpha^\beta}{A w^\beta B^\beta}, \text{ donde } L = \left(\frac{\bar{Q} r^\beta \alpha^\beta}{A w^\beta B^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \text{ o sea}$$

$$L^{**} = \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r\alpha}{w\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \quad (5)$$

Si se reemplaza (5) en (4), se obtiene:

$$K^{**} = \frac{w\beta}{r\alpha} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r\alpha}{w\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \quad (6)$$

L^{**} y K^{**} se conocen como las demandas Hicksianas o compensadas del trabajo y capital respectivamente (ver pie de página 3); es decir, son las cantidades óptimas de L y K que minimizan los costos para obtener un nivel de producto deseado.

Por último, si se reemplaza (5) y (6) en la función objetivo, se obtiene la "función indirecta de costos".

$$CT = wl + rk$$

$$CT^* = w \left[\left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r\alpha}{w\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right] + r \left[\frac{w\beta}{r\alpha} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r\alpha}{w\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right]$$

$$CT^* = W^{\left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + W^{\left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \beta^{\left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} \alpha^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1\right)} r^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$$

$$CT^* = w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

Esta "función indirecta de costos", muestra cómo aumenta el costo total de producción cuando aumenta el nivel de producción Q , y cómo varían los costos cuando varían los precios de los factores, cuando $\alpha+\beta=1$ el proceso muestra rendimientos constantes a escala, y cuando $(\alpha+\beta)>1$ ó $(\alpha+\beta)<1$, los rendimientos a escala son crecientes y decrecientes respectivamente.

TERCERA PARTE

4. Maximización del beneficio y demanda de factores

Hemos encontrado a través de la dualidad en el equilibrio del producto las cantidades de trabajo y capital que permiten obtener un nivel de producción maximizador de los beneficios (π). Los beneficios económicos que están definidos como la diferencia entre el ingreso total (IT) y el costo total (CT), $\pi = IT - CT$, serán máximos cuando esta diferencia sea la mayor posible, ahora como el IT y el CT dependen de los factores de producción K y L y de su costo, los beneficios serán una función de K , L , r y w .

$$IT = PQ \rightarrow IT = P (AL^\alpha K^\beta)$$

$$(1) IT = P(AL^\alpha K^\beta)$$

$$(2) CT = wL + rK$$

$$(3) \pi(K, L) = P(AL^\alpha K^\beta) - wL - rK \text{ (función de beneficios).}$$

Dado que los costos de los factores y el precio del producto están dados bajo los supuestos de la competencia perfecta, la empresa se enfrenta a un problema de maximización de los beneficios, donde debe elegir los niveles óptimos de K y L , los que alcanzará al cumplir las condiciones marginales para hallar un máximo global óptimo para todos los valores de la función.

Las condiciones de primer orden son: (C.P.O.)

$$(4) \frac{\partial \pi}{\partial L} = P(aAL^{\alpha-1}K^\beta) - w = 0$$

$$(5) \frac{\partial \pi}{\partial L} = P(PMgL) - w = 0 \quad \text{donde } P(PMaL) = w$$

$$(6) \frac{\partial \pi}{\partial K} = P(bAL^\alpha K^{\beta-1}) - r = 0$$

$$(7) \frac{\partial \pi}{\partial K} = P(PMgK) - r = 0 \quad \text{donde } P(PMaK) = r$$

Según las C.P.O., una empresa maximizadora de los beneficios debe demandar factores de producción hasta donde se cumpla la condición de que su contribución marginal a los ingresos (productividad marginal) sea igual a su costo marginal de contratarlo. Si la empresa demanda factores donde su contribución marginal sea superior a su costo marginal, no estará demandando los factores requeridos para maximizar su beneficio, caso contrario, estaría demandando factores por encima de los requeridos, gráficamente se observa:

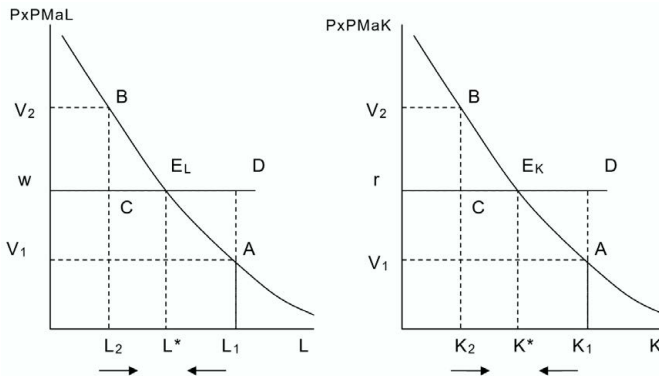


Gráfico 14

Bajo los supuestos de los rendimientos marginales decrecientes de los factores productivos que explican la relación inversa entre el factor y su productividad marginal, se observa en la gráfica 14: a) que el demandar L_2 unidades de trabajo, ésta tendrá una contribución marginal de V_2 (en términos monetarios) por encima de su costo, w , (salario monetario), que está dado para cualquier nivel de trabajo (L), por lo cual la empresa no estaría maximizando sus beneficios debido a que renunciaría a los que le reparta el contratar L^* , representados por el área comprendida entre los puntos $E_L B C$. Caso contrario sucedería si la empresa demanda L_1 unidades de trabajo que tendrían una contribución marginal de V_1 por debajo de su costo, w , lo que significa una pérdida para la empresa, representada por el área comprendida entre los puntos $E_L D A$, en este caso la empresa estaría utilizando unidades de trabajo por encima de los que le garantizarían un óptimo beneficio. Debe la empresa entonces aumentar la demanda de L si se encuentra en L_2 o disminuirla si se encuentra en L_1 , el nivel de trabajo L^* será el que permita un óptimo beneficio para la empresa. El análisis anterior será similar para la parte b) de la gráfica, que corresponde a la demanda de unidades de capital,

donde K^* será el nivel óptimo a utilizar de capital de forma tal que se obtengan los máximos beneficios económicos por parte de la empresa.

Las condiciones de primer orden establecen la existencia de un máximo pero no garantizan que éste sea global, es decir que la función de beneficios decrezca cuando se aleja en cualquier sentido de su punto máximo, llamado también punto crítico. Para que exista un verdadero máximo global se deben cumplir las condiciones de segundo orden, de tal manera que a partir del punto crítico (máximo) cualquier pequeña variación de la K disminuya los beneficios, es decir la pendiente (determinado por las derivadas parciales $(\frac{\partial \pi}{\partial K} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial L})$) deben ser negativas:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial K} < 0 \Rightarrow \pi_{kk} < 0; \text{productividad marginal decreciente del capital}$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial L} < 0 \Rightarrow \pi_{LL} < 0; \text{productividad marginal decreciente del trabajo}$$

Ahora las productividades marginales decrecientes deben garantizar que los costos marginales sean crecientes y no se presenten efectos cruzados entre K y L que alejen el beneficio de su punto máximo, es posible que al aumentar la producción se requieran más unidades de K y L , se incremente la productividad de L y disminuyan los costos marginales, alejándose del punto crítico, es necesario entonces que las productividades marginales decrecientes sean lo suficientemente grandes para contrarrestar cualquier efecto cruzado entre K y L . Lo que significa que además de las condiciones de segundo orden, es necesario que: $(\pi_{LL} \pi_K^2 - 2 \pi_{LK} \pi_L + \pi_{kk} \pi_L^2) < 0$

Si se realiza la demostración matemática se tiene que:

$d^2 \pi < 0$ para cualquier dirección que se aleje del máximo.

Si se toma el diferencial en la función de beneficios (π):

$$(10) \quad d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial L} dL + \frac{\partial \pi}{\partial K} dK$$

$$(11) \quad \partial^2 \pi = \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial L} \partial L + \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} \partial K \right) \partial L + \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} \partial L + \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial K} \partial K \right) \partial K$$

Según teorema de YOUNG: $\frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L}$

$$(12) \quad \partial^2 \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} \partial L^2 + 2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} \partial L \partial K + \frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} \partial K^2$$

$$(13) \quad \partial^2 \pi = \pi_{LL} \partial L^2 + 2 \pi_{LK} \partial L \partial K + \pi_{KK} \partial K^2$$

Como en la función de beneficios está sujeta a una restricción lineal (los costos totales), sólo deben considerarse las variaciones de K y L que satisfagan la restricción, para lo cual se debe calcular la diferencial total de la restricción:

$$CT = wL + rK$$

$$(14) \quad CT - wL - rK = 0 \rightarrow \text{restricción}$$

Al tomar diferencial:

$$(15) \quad -w dL - r dK = 0$$

O sea:

$$(16) \quad dK = \frac{-w dL}{r}$$

Si se combina la ecuación (16) con las (5) y (7) que son las condiciones de primer orden:

$$(17) \quad \partial K = \frac{-P(PMgL) \partial L}{P(PMgK)} \rightarrow \partial K = \frac{-PMgL \partial L}{PMgK} \rightarrow \partial K = \frac{-\pi_L \partial L}{\pi_K}$$

y al sustituir (17) en (13):

$$\partial^2 \pi = \pi_{LL} \partial L^2 + 2\pi_{LK} \partial L \left(-\frac{\pi_L}{\pi_K} \partial L \right) + \pi_{KK} \left(-\frac{\pi_L}{\pi_K} \partial L \right)^2$$

$$(18) \partial^2 \pi = \pi_{LL} \partial L^2 - 2\pi_{LK} \frac{\pi_L}{\pi_K} \partial L^2 + \pi_{KK} + \pi_{KK} \frac{\pi_L^2}{\pi_K^2} \partial L^2$$

Reordenando y sacando común denominador

$$(19) \partial^2 \pi = \frac{\partial L^2}{\pi_K^2} \left(\pi_{LL} \pi_K^2 - 2\pi_{LK} \pi_K \pi_L + \pi_{KK} \pi_L^2 \right)$$

Para que $\partial^2 \pi < 0$, se debe cumplir que:

$$(20) \left(\pi_{LL} \pi_K^2 - 2\pi_{LK} \pi_K \pi_L + \pi_{KK} \pi_L^2 \right) < 0$$

Las condiciones de segundo orden expuestas en las ecuaciones (8), (9) y (20) garantizan que la función de beneficios sea cuasi cóncava, lo que permite un máximo global.

Ejemplo:

La siguiente es la función de producción para taburetes:

$$Q(L, K) = 20 K^{0,6} L^{0,4}$$

Donde Q = Cantidad de taburetes

K = unidades capital (horas-máquina)

L = unidades de trabajo (horas-hombre)

Si el precio del mercado de cada taburete es de \$2, el costo de una unidad de trabajo es de \$5 y el de una unidad de capital es de \$10.

a) Verificar que la función de beneficios cumpla las condiciones para que exista un máximo global:

$$\pi = PQ - CT$$

$$\pi = 2(20K^{0,6} L^{0,4}) - 10K - 5L$$

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \pi_K = 2(12K^{-0,4} L^{0,4}) - 10 = 0 \rightarrow P(PMgK) = 10$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \pi_L = 2(8K^{0,6}L^{-0,6}) - 5 = 0 \rightarrow P(PMgK) = 5$$

Condiciones de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial K} = \pi_{KK} = -9,6K^{-1,4}L^{0,4} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial L} = \pi_{LL} = -9,6K^{0,6}L^{-1,6} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} = \pi_{LK} = 9,6K^{-0,4}L^{-0,6}$$

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial K} \right)^2 = \pi^2_K = 144K^{-0,8}L^{0,8} - 100$$

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial L} \right)^2 = \pi^2_L = 256K^{1,2}L^{-1,2} - 25$$

Donde se debe cumplir que:

$$\left(\pi_{LL} \pi^2_K - 2\pi_{LK} \pi_K \pi_L + \pi_{KK} \pi^2_L \right) < 0$$

O sea que:

$$-9,6K^{0,6}L^{-1,6}(144K^{-0,8}L^{0,8}-100) - 2(9,6K^{-0,4}L^{-0,6})(24K^{-0,4}L^{0,4}-10)(16K^{0,6}L^{-0,6}-5)$$

$-9,6K^{-1,4}L^{0,4}(256K^{1,2}L^{-1,2}-25) < 0$, lo que se comprueba con los signos de los sumandos.

4.1. Demanda de factores y la función de oferta

Las ecuaciones (4) y (6) definen las condiciones que permiten demandar los factores que maximizan los beneficios y encontrar un nivel óptimo de producción.

A partir de las condiciones marginales se pueden obtener las expresiones para las demandas de K y L :

$$(4) P(\alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta}) - w = 0$$

$$(6) P(\beta AL^{\alpha} K^{\beta-1}) - r = 0$$

Si se multiplica la (4) y la (6) por L y por K respectivamente se tiene:

$$(21) P\alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta} L - wL = 0 \rightarrow P\alpha AL^{\alpha} K^{\beta} - wL = 0$$

$$(22) P\beta AL^{\alpha} K^{\beta-1} K - rK = 0 \rightarrow P\beta AL^{\alpha} K^{\beta} - rK = 0$$

Como la función de producción es:

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$$

Las ecuaciones quedarían:

$$(23) P\alpha Q - wL = 0$$

$$(24) P\beta Q - rK = 0$$

Despejando L y K :

$$(25) L^* = \frac{\alpha PQ}{w}$$

$$(26) K^* = \frac{\beta PQ}{r}$$

L^* y K^* serán las expresiones para las demandas óptimas de trabajo (L^*) y capital (K^*) que son funciones de los parámetros P , w , r y del nivel de producción óptimo Q^* .

$$L^* = L^*(P, \alpha, w, Q^*)$$

$$K^* = K^*(P, \beta, r, Q^*)$$

Para hallar el nivel óptimo de producción, se introducen las demandas óptimas L^* y K^* en la función de producción:

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

$$(27) \quad Q = A \left(\frac{\alpha PQ}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\beta PQ}{r} \right)^\beta$$

$$Q = Q^{\alpha+\beta} A \left(\frac{\alpha P}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\beta P}{r} \right)^\beta$$

$$\frac{Q}{Q^{\alpha+\beta}} = A \left(\frac{\alpha P}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\beta P}{r} \right)^\beta$$

$$Q^{1-\alpha-\beta} = A \left(\frac{\alpha P}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\beta P}{r} \right)^\beta$$

$$(28) \quad Q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha P}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta P}{r} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

La ecuación (28) representa la producción óptima que maximiza los beneficios como una función del precio del producto y de los costos de los factores K y L y se denomina FUNCIÓN DE OFERTA. La función de oferta junto con las funciones de demanda de factores proporciona la solución completa del problema de maximización del beneficio.

Para el caso de una COBB-DOUGLAS, con rendimientos constantes a escala, donde $\alpha+\beta = 1$, la función de oferta no está bien definida. En este caso con factores variables los costos marginales serán constantes y no dependen de la producción. Si el precio del mercado está al mismo nivel del costo marginal ($P = CMg$), la cantidad ofrecida será ilimitada y si el precio está por encima del costo marginal ($P > CMg$), no existe ninguna solución que maximice los beneficios.

En el caso de una función de producción COBB-DOUGLAS, con rendimientos constantes a escala, se debe introducir un tercer factor fijo y determinar así costos marginales crecientes en los factores variables.

Ejemplo:

En la anterior función de producción de taburetes, aparece un tercer factor fijo, la tierra $\bar{T}$:

$$Q(L, K, \bar{T}) = 20K^{0.5}L^{0.2}\bar{T}^{0.3}$$

Q será una función de producción a corto plazo (un factor permanece fijo), donde se supone que $T = 2152$ metros cuadrados:

$$Q = 20K^{0.5}L^{0.2}(2152)^{0.3}$$

$$Q = 200K^{0.5}L^{0.2}$$

La anterior función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala $[(\alpha+\beta)<1]$, lo que lleva a costos marginales crecientes.

$$\pi = QP - CT$$

$$CT = rK + wL + vT$$

Donde: r = costo del capital

w = costo del trabajo

v = costo o renta de la tierra

$$\pi = P(200K^{0.5}L^{0.2}) - rK - wL - vT$$

Las condiciones de primer orden para hallar el máximo son:

$$(1) \quad \frac{\partial \pi}{\partial K} = 100PK^{-0.5}L^{0.2} - r = 0 \rightarrow 100PK^{-0.5}L^{0.2} = r$$

$$(2) \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = 100PK^{0.5}L^{-0.8} - w = 0 \rightarrow 40PK^{0.5}L^{-0.8} = w$$

dividiendo (1) entre (2) y despejando L

$$\frac{100PK^{-0.5}L^{0.2}}{40PK^{0.5}L^{-0.8}} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2.5 L}{K w} = r$$

(3) $L = rK$, despejando;

$$(4) \quad K = \frac{2,5 w L}{2,5 w r}$$

Introduciendo (3), en la ecuación (1), obtenemos la ecuación para la demanda de capital:

$$(5) \quad \frac{100 P K^{-0,5} r^{0,2}}{1,20112 w^{0,2}} K^{0,2} = r$$

$$83,25 P K^{-0,3} r^{0,2} w^{-0,2} = r$$

$$\frac{83,25 P r^{0,2} w^{-0,2}}{r} = \frac{1}{K^{-0,3}}$$

$$K^{0,3} = 83,25 P r^{-0,8} w^{-0,2}$$

$$K = (83,25 P)^{3,33} r^{-2,67} w^{-0,67}$$

$$(6) \quad \frac{K^* (83,25 P)^{3,33}}{r^{2,67} w^{0,67}} \rightarrow \text{función para la demanda de capital}$$

Introduciendo (4) en la ecuación (2), obtenemos la ecuación para la demanda de trabajo.

$$(7) \quad 40 P \left(\frac{2,5 w L}{r} \right)^{0,5} L^{-0,8} = w$$

$$\frac{63,25 P w^{0,5} L^{-0,3}}{r^{0,5}} = w$$

$$L^{-0,3} = \frac{w r^{0,5}}{63,25 P w^{0,5}}$$

$$L^{-0,3} = \frac{w r^{0,5} r^{0,5}}{63,25 P} \rightarrow L^{-0,3} = \frac{63,25 P}{w r^{0,5} r^{0,5}}$$

$$(8) L^* = \frac{(63,25P)^{3,33}}{w^{1,67} r^{1,67}} \rightarrow \text{función para la demanda de trabajo.}$$

Por último, si se introducen las ecuaciones (6) y (8) en la función de producción a corto plazo, obtenemos la ecuación para la función de oferta.

$$Q = 200 K^{0,5} L^{0,2}$$

$$Q = 200 \left[\frac{(83,25 P)^{3,33}}{r^{2,67} w^{0,67}} \right]^{0,5} \left[\frac{(63,25 P)^{3,33}}{r^{1,67} w^{1,67}} \right]^{0,2}$$

$$Q = 200 \left[\frac{1.3164^{3,3} (63,25 P)^{3,33}}{r^{2,67} w^{0,67}} \right]^{0,5} \left[\frac{(63,25 P)^{3,33}}{r^{1,67} w^{1,67}} \right]^{0,2}$$

$$Q = 200 \left[\left(-\frac{1.3614^{1,65} (63,25 P)^{1,65}}{r^{1,34} w^{0,34}} - \left(\frac{(63,25 P)^{0,67}}{r^{0,33} w^{0,33}} \right) \right) \right]$$

$$Q = \frac{332.7(63.25P)^{2.32}}{r^{1.67} w^{0.67}} \Rightarrow \text{función de oferta}$$

La anterior función de oferta es homogénea de grado cero, lo que significa que si tanto el precio del producto (P) como el costo de los factores variables (w, r) varían en la misma proporción, la cantidad ofrecida no varía, supongamos por ejemplo que P, w y r, se duplicarán:

$$Q = \frac{332,7[(63.25)^{2.32} (2P)^{2.32}]}{(2r)^{1.67} (2w)^{0.67}} = \frac{332.7(2)^{2.32} (63.25)^{2.32} P^{2.32}}{2^{1.67} r^{1.17} 2^{0.67} w^{0.67}}$$

$$Q = \frac{332.7(2)^{2.33} (63.25P)^{2.32}}{2^{2.33} r^{1.67} w^{0.67}}$$

Entonces:

$$Q = \frac{332.7(63.25P)^{2.32}}{r^{1.67} w^{0.67}}$$

Que es la misma función de oferta.

Si se supone que:

$r = \$30$ – hora máquina

$w = \$20$ – hora hombre

$$Q = \frac{332.7(63.25P)^{2.32}}{(30)^{1.67} (20)^{0.67}}$$

$$Q = 2304,60 P^{2.32}$$

Si, $P = \$1$, la empresa ofrecerá 2304.60 taburetes por hora, los que se producirán utilizando:

$$K = \frac{(83.25P)^{3.33}}{r^{2.67} w^{0.67}}$$

$$K = \frac{(83.25)^{3.33}}{(30)^{2.67} (20)^{0.67}} = 38 \text{ horas máquina}$$

$$L = \frac{(63.25)^{3.33}}{w^{1.67} r^{1.67}}$$

$$L = \frac{(63.25)^{3.33}}{(20)^{1.67} (30)^{1.67}}$$

$$L = \frac{(63.25)^{3.33}}{(20)^{1.67} (30)^{1.67}} = 22.8 \text{ horas-hombre}$$

Si se introducen estas demandas de factores en la función de producción a corto plazo:

$$Q = 200 K^{0.5} L^{0.2}$$

$$Q = 200(38)^{0.5} (22.8)^{0.2} = 2.304$$

Con estos factores los costos variables a corto plazo serán:

$$CVT = wL + rK$$

$$CVT = 20(22.8) + 30(38) = 1.596$$

Los ingresos que son de \$2.304, cubrirán los costos variables y los costos fijos, maximizando así su beneficio.

4.2. Los factores específicos y la distribución de la renta

Dentro de las teorías del comercio internacional, se encuentra el modelo desarrollado por Paul Samuelson y Ronald Jones (1971), como una extensión del modelo ricardiano de la ventaja comparativa.

El modelo de factores específicos, a diferencia del ricardiano, permite la existencia de otros factores de producción, distintos del trabajo. En este caso el trabajo es un factor móvil que puede desplazarse entre los sectores de la economía, mientras que los demás factores serán específicos o fijos para un determinado sector.

El comercio internacional tal como lo demuestra Ricardo puede llevar a que todos los países se beneficien, sin embargo, en la realidad se observa que éste no es tan claramente beneficioso, si bien es cierto las naciones se pueden beneficiar mutuamente con el comercio, también es cierto que determinados sectores de un país se podrían perjudicar, al menos en el corto plazo.

Para el caso del modelo de factores específicos se parte de los siguientes supuestos.

- 2 bienes = manufacturas y alimentos
- 3 factores de producción; trabajo (L), capital (K), tierra (T)
- La producción de manufacturas presenta un factor específico, el capital, y un factor móvil, el trabajo.

$$Q_m = Q_m(L_m, \bar{K})$$

La producción de alimentos presenta un factor específico, la tierra, y un factor móvil, el trabajo.

$$Q_A = Q_A(L_A, \bar{T})$$

Las funciones de producción al tener un insumo fijo, serán a corto plazo, con rendimientos marginales decrecientes, cuya representación se observa en la gráfica 15:

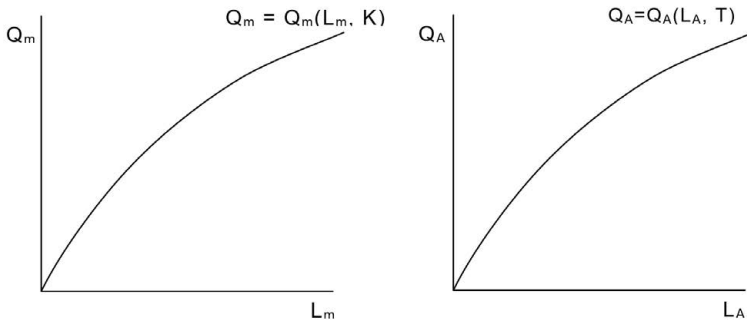


Gráfico 15

El hecho de que las funciones de producción presenten rendimientos marginales decrecientes establece la diferencia fundamental con el modelo ricardiano, que supone rendimientos constantes. La frontera de posibilidades de producción presentará costos marginales crecientes y tendrá forma cóncava (gráfico 16).

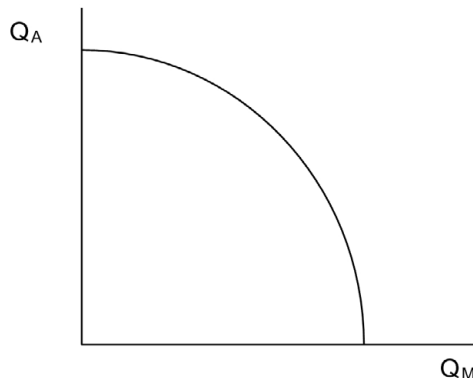


Gráfico 16

Los sectores económicos maximizadores del beneficio demandarán el factor trabajo (L) según se cumpla la condición:

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS

$$P_A P M a L_A = w \rightarrow \text{demanda de } L_A$$

$$P_m P M a L_M = w \rightarrow \text{demanda de } L_M$$

La expresión gráfica de la condición sería: (gráfico 17)

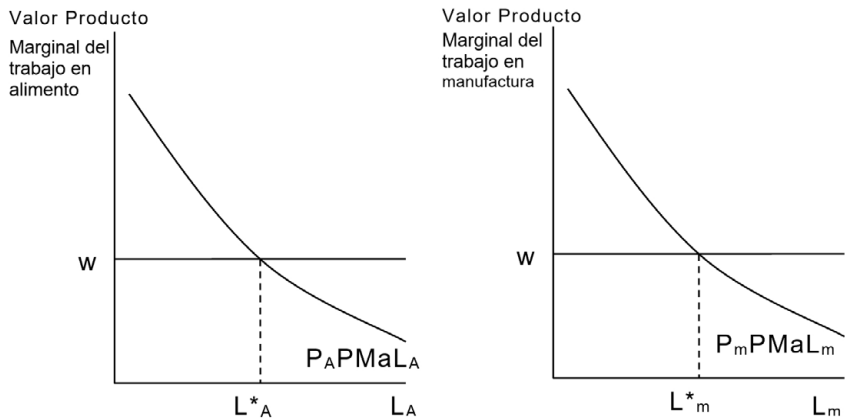


Gráfico 17

Si se reúnen los diferentes trabajos en un solo gráfico o caja: (gráfico 18)

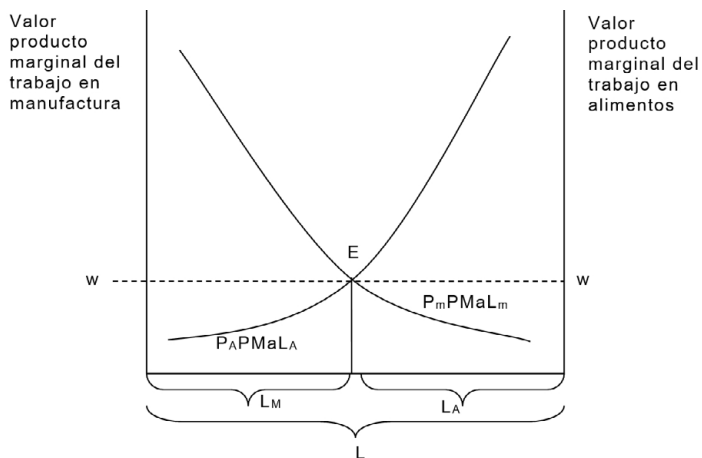


Gráfico 18

El punto E, define el equilibrio en esta economía donde existe un salario nominal (w) para los dos sectores, y una asignación del trabajo total para cada sector, L_A y L_M .

En E se cumplen las condiciones para demandar los niveles óptimos del trabajo, que permitan obtener una máxima producción.

$$(1) P_M P_M a_{L_M} = P_A P_M a_{L_A} = w \rightarrow \text{expresada en términos nominales}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) P_M a_{L_M} = \frac{w}{P_A} \\ (3) P_M a_{L_A} = \frac{w}{P_A} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Expresadas en términos reales, donde} \\ w/P, \text{ es el salario real para cada sector} \end{array}$$

En la medida que exista una variación relativa en los precios de los bienes en una proporción distinta, se producirán efectos reales en la economía como el empleo, la producción, las rentas de los trabajadores, los capitalistas y los terratenientes.

Para explicar estos efectos, vamos a utilizar el siguiente problema:

“Una economía puede producir el bien 1 utilizando trabajo y capital y el bien 2 utilizando trabajo y tierra. La oferta total de trabajo es de 100 unidades. Dada la oferta de capital, las producciones de los dos bienes dependen de las cantidades de trabajo de la siguiente manera⁷ :

7 El planteamiento del problema es tomado del libro Economía Internacional de Paul Krugman y Maurice Obstfeld, quinta edición, páginas 61 y 62.

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS

L ₁	Q ₁	PMgL ₁	L ₂	Q ₃	PMgL ₂
10	25.1	1.51	10	39.8	1.59
20	38.1	1.14	20	52.5	1.05
30	48.6	0.97	30	61.8	0.82
40	57.7	0.87	40	69.3	0.69
50	66.0	0.79	50	75.8	0.61
60	73.6	0.74	60	81.5	0.54
70	80.7	0.69	70	86.7	0.50
80	87.4	0.66	80	91.4	0.46
90	93.9	0.63	90	95.9	0.43
100	100	0.60	100	100	0.40

El bien 1, corresponde a la manufactura, el bien 2 corresponde al alimento.

Inicialmente se determinan las condiciones de equilibrio, o sea el trabajo demandado en cada sector, la producción de cada bien y las rentas de los trabajadores, los capitalistas y los terratenientes.

Según los datos suministrados en la tabla anterior, se puede suponer que la información sobre la producción parte de una función tipo COBB-DOUGLAS, cuya estructura formal sería:

$$(4) Q_M = AL_M^\alpha \bar{K}^\beta$$

Como $\bar{K}^\beta$ es constante, entonces:

(5) $Q_M = H_M L_M^\alpha$, donde $H_M = AK^\beta$, es una constante, cuyo valor depende de la tecnología y de la participación del factor específico (K) en la producción.

$$(6) Q_A = AL_A^\alpha \bar{T}_A$$

Como $\bar{T}_A$ es constante, entonces:

(7) $Q_A = H_A L_A^\alpha$; donde $H_A = AT^\beta$, es una constante, cuyo valor depende de la tecnología y de la participación del factor específico (T) en la producción.

Inicialmente se evaluarán los parámetros H y a para cada sector.

$$\text{En (5) } PMaL_M = \frac{dQ_M}{dL_M} = \alpha H_M L_M^{\alpha-1}$$

$$PMaL_M = \alpha H_M \frac{L_M^\alpha}{L_M} \text{ como } Q_M = H_M L_M^\alpha, \text{ entonces:}$$

$$(8) PMaL_M = \alpha \frac{Q_M}{L_M}$$

$$\text{En (7) } PMaL_A = \frac{dQ_A}{dL_A} = \alpha H_A L_A^{\alpha-1}$$

$$PMaL_A = \alpha H_A \frac{L_A^\alpha}{L_A}; \text{ como } Q_A = H_A L_A^\alpha, \text{ entonces:}$$

$$(9) PMaL_S = \alpha \frac{Q_A}{L_A};$$

Si se utiliza la información de la tabla, se toman los datos correspondientes a $L_M = 100$ y $L_A = 100$, cuyas producciones totales y marginales son 100; 0,60; 100 y 0,40 respectivamente, se tiene que:

$$\text{En (8) } 0,60 = \alpha \frac{100}{100}; \text{ o sea que } \alpha_M = 0,60$$

$$\text{En (9) } 0,40 = \alpha \frac{100}{100}; \text{ o sea que } \alpha_M = 0,40$$

Ahora:

$$\text{De (5): } H_M = \frac{Q_M}{L_M^\alpha} = \frac{100}{100^{0,6}} = 6.31$$

$$H_M = 6,31$$

Por lo que:

$$(10) Q_M = 6.31 L_M^{0.6} \rightarrow \text{función de producción a corto plazo para las manufacturas}$$

$$\text{de (7): } H_A = \frac{Q_A}{L_A^\alpha} = \frac{100}{100^{0,4}} = 15,85$$

$$H_A = 15,85$$

Por lo que:

$$(11) Q_A = 15.85 L_A^{0.4} \rightarrow \text{función de producción a corto plazo para el alimento .}$$

Si se supone que el precio del alimento respecto al de la manufactura es de 2, o sea: $P_A/P_M = 2$, se deben encontrar las demandas de trabajo en cada sector, cuyas condiciones establecen que:

$$P_M P_{Ma} L_M = P_A P_{Ma} L_A$$

$$(12) \frac{P_A}{P_M} = \frac{P_{Ma} L_M}{P_{Ma} L_A}$$

De las ecuaciones (10) y (11) se encuentran las producciones marginales de la manufactura y el alimento respectivamente.

$$(13) P_{Ma} L_M = 3.786 L_M^{-0.4}$$

$$(14) P_{Ma} L_A = 6.34 L_A^{-0.6}$$

Reemplazando en (12)

$$(15) \frac{3.786 L_M^{-0.4}}{6.34 L_A^{-0.6}} = 2$$

$$3,786 L_M^{-0.4} = 12,86 L_A^{-0.6}$$

$$L_M^{-0.4} = 3,35 L_A^{-0.6}$$

$$L_M^{0.4} = \frac{L_A^{0.6}}{3.35} \Rightarrow L_M^{0.4} = 0.30 L_A^{0.6} ; \text{ como: } 100 = L_A + L_M$$

$$L_M^{0.4} = 0.30 (100 - L_M)^{0.6}$$

El despeje respectivo arroja que:

$$L_M = 29,30, \text{ por lo que } L_A = 70,70$$

Si suponemos que: $P_A = 2$ y $P_M = 1$ y

$P_M P_M a L_M = P_A P_M a L_A = w$, en (13) y (14) tenemos:

$$1[3,786 (29,30)^{-0.4}] = 2[6.34(70.70)^{-0.6}] = w$$

$$0.9850 = 0.9850 = w$$

El salario nominal será de 0.9805 unidades monetarias.

El salario real será: $\frac{w}{P_M} = \frac{0.9850}{1}$ en el sector de las manufacturas

$$\frac{w}{P_A} = \frac{0.9850}{2} = 0.4925 \text{ en el sector del alimento}$$

El salario real está establecido en unidades físicas del producto, e indica el número de bienes que se podrían adquirir con el salario monetario.

Ahora se encuentran las producciones respectivas de manufactura y alimento, introduciendo las demandas del trabajo en cada función de producción:

$$Q_M = 6,31(29.30)^{0.6} = 47.88$$

$$Q_A = 15,85(70.70)^{0.4} = 87.06$$

Se calcula el PIB:

$$PIB = P_M Q_M + P_A Q_A = 1(47.88) + 2(87.06) = 222$$

Se calculan las rentas:

$$\rightarrow \text{De los trabajadores } (RL) = wL_M + wL_A$$

$$wL_M = 0.9850(29.30) = 28.86 \rightarrow \text{renta en la manufactura}$$

$$wL_A = 0.9850(70.70) = 69.64 \rightarrow \text{renta en el alimento}$$

$$RL = wL_M + wL_A = 28.86 + 69.64 = 98.50$$

$$\rightarrow \text{De los capitalistas } (RK) = P_M Q_M - wL_M = 1(47.82) - 0.9850(29.30) = 19.01$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{De los terratenientes } (RT) &= P_A Q_A - wL_A \\ &= 2(87.06) - 0.9850(70.70) = 104.48 \end{aligned}$$

Se evalúan las cuentas nacionales

$$PIB = \text{Rentas}$$

$$\text{Rentas} = RL + RK + RT = 98.50 + 19.01 + 104.48 = 222$$

Ahora se considera qué pasaría si el precio relativo del alimento (P_2/P_1) baja a 1; para lo cual se deben encontrar las nuevas demandas de trabajo, para ello reemplazamos en la ecuación (12).

$$I = \frac{3,786 L_M^{-0.4}}{6.34 L_A^{-0.6}}$$

$$6.34 L_A^{-0.6} = 3.786 L_M^{-0.6}$$

$$L_M^{-0.4} = 1.6746 (100 - L_M)^{-0.6}$$

$$L_M^{0.4} = 0.59716 (100 - L_M)^{0.6}$$

El despeje respectivo arroja que:

$$L_M = 62.72, \text{ por lo que } L_A = 37.27$$

Si suponemos que: $P_A = 1$ y $P_M = 1$

$$P_M P_M a L_M = P_A P_M a L_A = w$$

$$1 [3.786(62.72)^{-0.4}] = 1 [6.34(37.27)^{-0.6}] = w$$

$$0.7232 = 0.7232 = w$$

El salario nominal será de 0.7232 unidades monetarias.

El salario real será:

$$\frac{w}{P_M} = \frac{0.7232}{1} = 0.7232 \text{ en el sector de las manufacturas}$$

$$\frac{w}{P_A} = \frac{0.7232}{1} = 0.7232 \text{ en el sector de alimentos}$$

Las producciones de manufacturas y alimentos:

$$Q_M = 6.31(62.72)^{0.6} = 75.59$$

$$Q_A = 15.85(37.27)^{0.4} = 67.39$$

Cálculo del PIB

$$PIB = P_M Q_M + P_A Q_A = 1(75.59) + 1(67.39) = 142.98$$

Cálculo de las rentas:

$$\rightarrow \text{De los trabajadores} = RL = wL_M + wL_A$$

$$wL_M = 0.7232(62.72) = 45.36 \rightarrow \text{renta en la manufactura}$$

$$wL_A = 0.7232(37.27) = 26.95 \rightarrow \text{renta en el alimento}$$

$$RL = wL_M + wL_A = 45.36 + 26.95 = 72.31$$

→ De los capitalistas $RK = 1(75.59) - 45.36 = 30.23$

→ De los terratenientes $RT = P_A Q_A - wL_A$
 $= 1(67.39) - 26.95 = 40.44$

Se evalúan las cuentas nacionales

PIB = Rentas

Rentas = $RL + RK + RT = 72.31 + 30.23 + 40.44 = 142.98$

Efectos de la disminución en el precio relativo del alimento (P_A/P_M) al pasar de 2 a 1

→ El salario nominal baja de 0.9850 a 0.7232

→ El salario real en manufacturas bajó de 0.9850 a 0.7232

→ El salario real en alimentos subió de 0.4925 a 0.7232

Como las cantidades demandadas de trabajo dependen del salario real, al bajar éste se aumentan las cantidades demandadas, lo que ocurrió en el sector de manufacturas al subir el empleo de 29.30 a 62.72 unidades de trabajo empleados; caso contrario ocurrió en el sector de alimentos donde el aumento del salario real disminuyó la demanda de trabajo de 70.70 a 37.27 unidades (gráfico 19).

Estas variaciones en el nivel de empleo se ven reflejadas en las cantidades producidas, al aumentar la demanda de trabajo en el sector manufacturas la producción aumentó de 47.88 a 75.59 unidades producidas, mientras que en el sector de alimentos la disminución del trabajo producidas al pasar de 87.06 a 67.39 unidades producidas.

El efecto sobre el ingreso de los trabajadores es ambiguo mientras unos ganaron al tener un mayor salario real (sector alimentos) otros perdieron (sector manufacturas).

Los capitalistas vieron incrementadas sus rentas al pasar de 19.01 a 30.23, debido a que ahora producen más y pagan un menor salario real.

Al contrario los terratenientes, vieron disminuidas sus rentas al pasar de 104.48 a 40.44, debido por una parte a la disminución de la producción y de los precios de los alimentos (menor ingreso) y por la otra al aumento en los salarios reales.

En el caso de la disminución del precio relativo del alimento el PIB disminuyó al pasar de 222 a 142.8.

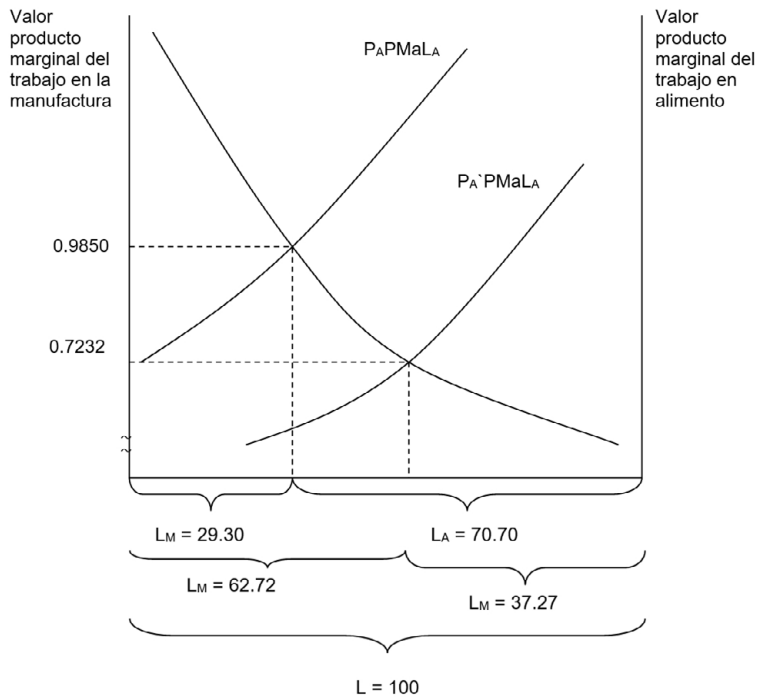


Gráfico 19

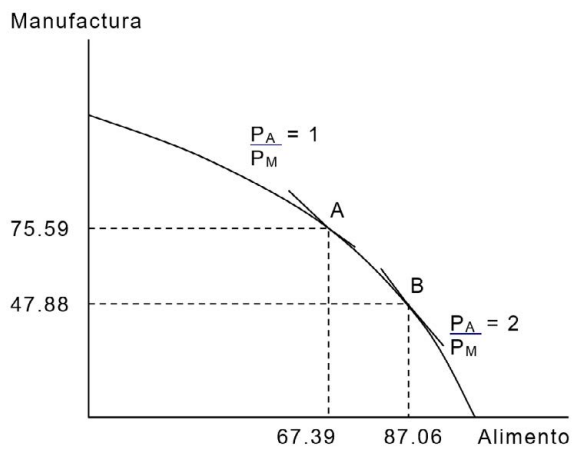


Gráfico 20

LA TECNOLOGÍA TIPO COBB-DOUGLAS

A los precios relativos del alimento de 2 se producen 87.06 alimentos y 47.88 manufacturas, al disminuir los precios relativos de 2 a 1, se produce un desplazamiento sobre la frontera de posibilidad de producción de B a A (ver gráfico 20), donde la producción de manufacturas aumenta a 75.59 y la de alimentos disminuye a 67.39.

Bibliografía

CALL, Stevent T. y HOLAHAN, William L. Microeconomía. Grupo editorial Iberoamericana, 1983.

COLIN GLASS, J. Métodos Matemáticos para Economistas. McGraw-Hill, 1982.

CHIANG, Alpha. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. 3 ed. McGraw-Hill, 1987.

FERNANDEZ DE CASTRO, Juan y TUGORES, Juan. Microeconomía. McGraw-Hill, 1997.

FRANK, Robert H. Microeconomía y Conducta. McGraw-Hill, 1992.

KRUGMAN, Paul y OBSTFELD, Maurice. Economía Internacional, teoría y política. 5 ed. 2001.

MADDALA, G.S. y MILLAR, Ellen. Microeconomía. McGraw-Hill, 1991.

PINDYCK, Robert S. y RUBINFELD, Daniel L. Microeconomía. 3 ed. Prentice Hall, 1995.

SALVATORE, Dominick. Microeconomía. 3 ed. McGraw-Hill, 1992.

VARIAN, Hal R. Microeconomía Intermedia. Un enfoque moderno.

